

物理チャレンジ2017

理論問題

2017年8月20日(日)

理論問題にチャレンジ 8:30~13:30

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問4題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙にも手を触れないこと。
2. 問題冊子は24ページである。解答冊子は17枚である。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答えのみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(11:50)後は、退出希望者は旗をあげて監督者に知らせ、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて退室すること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

第1問 A (50点)

力学のさまざまな運動の解析において、運動量保存則とエネルギー保存則は極めて有用である。以下はその一例である。

水平でなめらかな床の上に図1のような三角柱が置かれている。水平と角度 30° の傾きをなす三角柱の斜面に、左から水平に飛んできた小球が衝突した。三角柱の斜面はなめらかであり、衝突は弾性衝突である。また小球と三角柱の重心はつねに同一の鉛直面内にあるとする。

衝突後、図2に示すように、小球は水平方向と角度 θ ($\theta > 30^\circ$) の方向に跳ね返され、三角柱は右向きに床面を滑り始めた。小球は放物運動して再び三角柱の斜面に衝突した。小球の質量と三角柱の質量の比がある値のときに、小球は最初に斜面に衝突した位置に当たるという(図2参照)。このときの小球の質量 m_1 と三角柱の質量 m_2 の比を求めよ。なお、小球の衝突直前の速さを v_0 、衝突直後の速さを v_1 、衝突直後の小球の速度の方向が水平となす角度を θ とする。また衝突後、三角柱が滑りだす速さを v_2 とする。

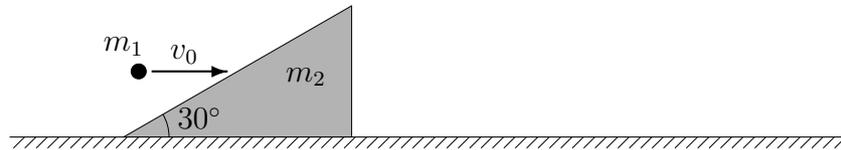


図1

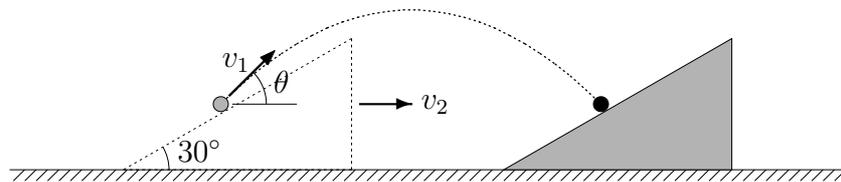


図2

- 問1 小球と三角柱からなる系を考えよう。床面に摩擦はないから、系に水平方向の外力は作用しない。ゆえに、衝突の前後で系の水平方向の運動量は保存する。この保存則を式で表せ。
- 問2 衝突は弾性的であり、衝突の前後で系の運動エネルギーは保存する。この保存則を式で表せ。
- 問3 斜面はなめらかなので、衝突の瞬間に小球に作用する力は斜面に垂直方向である。衝突時間は十分に短いとすれば、この間に小球に作用する重力の力積は無視できるので、小球の運動量の斜面に平行な成分は保存する。この保存則を式で表せ。
- 問4 小球が再び三角柱の斜面に当たる位置が、最初に小球が衝突した位置であるためには、この間に両者が水平方向に移動した距離が等しくなければならない。このことから導かれる関係式を求めよ。
- 問5 以上の式から v_1 、 v_2 、 θ を消去して質量の比 $r = \frac{m_1}{m_2}$ を求めよ。
- 問6 小球と三角柱の質量比が前問の値に等しいとき、2回目の衝突で小球が跳ね返される方向を求めよ。

第1問B (50点)

2011年7月8日の打ち上げを最後に退役したスペースシャトル(図1)が地球帰還時に大気圏へ再突入するときの減速について考えよう。

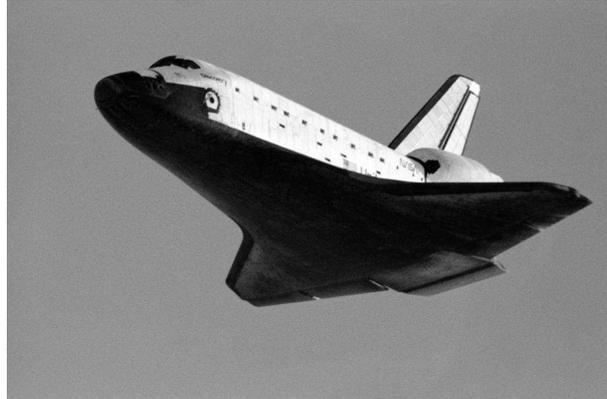


図1

大気圏への再突入過程の一例は以下のようである。

- (i) 進行方向に向けてエンジンを2～3分間だけ(逆)噴射して、地球周回軌道から大気圏突入のための楕円軌道に移る。
- (ii) 高度約120 km, 秒速7.6 km (マッハ約24) で、大気圏に突入。このとき機体の仰角(機体が水平となす角)は 40° である。
- (iii) 高度約70 km, 秒速6.7 km 程度のとき、スペースシャトルの機体外側は最も激しい加熱を受ける。
- (iv) 高度約55 km のとき秒速3.7 km であり、このころから、仰角を 40° から減らし始める。
- (v) 時速約430 km(秒速120 m) で車輪を出し、時速約346 km(秒速96 m) で接地。

(宇宙航空研究開発機構(JAXA)のホームページ http://iss.jaxa.jp/iss_faq/shuttle/ の「スペースシャトルはどうやって軌道を離脱するのですか」による。)

以下の問いに答えよ。

- 問1 時刻 t において、質量 m 、速度 v のスペースシャトルが、微小時間 dt の間、一定の相対速度 u で進行方向にガスを噴射し、質量、速度がそれぞれ質量 $m + dm$ 、速度 $v + dv$ になったとする。 $m \gg |dm|$ 、 $v \gg |dv|$ として以下の問いに答えよ(いまの場合 $dm < 0$ 、 $dv < 0$ であることに注意)。
- (a) 時刻 t におけるスペースシャトルの加速度と単位時間あたりの噴射ガスの質量の関係を求めよ。
 - (b) スペースシャトルの質量が m_i のときの速度が v_i であるとして、質量が m_f になったときの速度 v_f を求めよ。
- 問2 スペースシャトルが地表に近づくと、速度 430 km/h で車輪がおろされ、およそ 346 km/h で接地する。車輪が接地したところで直径 12 m の制動用パラシュートが開く(図2参照)。機体の速度が 110 km/h 以下になるとパラシュートは外される。



図 2

スペースシャトルのタイヤが接地した後，制動用パラシュートが開き，外されるまでのスペースシャトルの速度は

$$v(t) = \frac{a}{bt + 1}$$

のような時間変化をしたとする。ここで， t はタイヤの着地からの経過時間， a, b は定数である。タイヤが接地した直後の速さを v_i ，パラシュートが外されたときの速さを v_f ，パラシュートを開いている時間を τ ，スペースシャトルの質量を m として以下の問いに答えよ。

- (a) 定数 a, b を v_i, v_f, τ を用いて表せ。
- (b) 時刻 t においてスペースシャトルに働いている力の大きさを $m, v_i, v_f, \tau, v(t)$ を用いて表せ。
- (c) $v(t) = 1 \text{ m/s}$ としたときにスペースシャトルにはたらく力の大きさは

$$\frac{1}{2} \times \text{抗力係数} \times \text{空気密度} \times \text{制動用パラシュートの断面積} \times (1 \text{ m/s})^2$$

と与えられるとする。抗力係数 = 1.42，空気密度 = 1.225 kg/m^3 ， $m = 78,000 \text{ kg}$ として制動用パラシュートが開いている時間は何秒か。また，その間にシャトルが進んだ距離は何 m か。

- (d) スペースシャトルが接地してからパラシュートが外されるまでの間にスペースシャトルが失ったエネルギーは何 J か。

問 3 ところでスペースシャトルが大気圏に突入するとき，スペースシャトルの機体外側は高温になる (図 3 参照)。この原因は，スペースシャトルの前方にある空気の分子がスパー

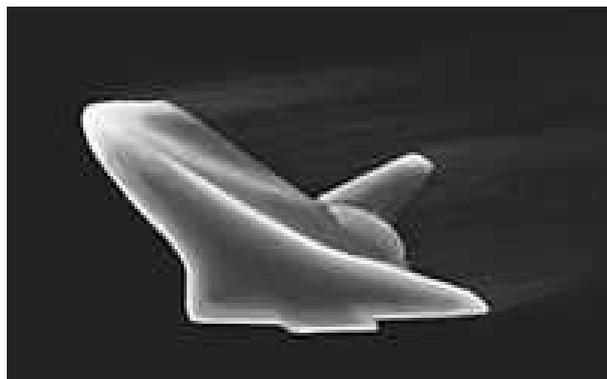


図 3 白い部分はより高温

スシャトルに高速で向かってくるためであるとしよう。上記の (iv) のとき，スペースシャトル前面付近の気体の温度 T はどの程度であろうか。大まかな数値を推定してみよ。なお，必要ならば，以下の数値などを用いよ。また，与えられていない物理量の数値を仮定してもよい。(この問いは必ずしも正しい答えを要求するものではない。推定のための発想や考察の進め方を評価する。)

ボルツマン定数 k_B 1.4×10^{-23} J/K

2 原子分子の気体の高温における内部エネルギー 1 分子あたり $\frac{7}{2}k_B T$
(これは振動の自由度まで考慮した場合の式である)

空気の平均モル質量 29 g/mol

アボガドロ定数 N_A 6.0×10^{23} mol⁻¹

(図 1, 2 はアメリカ航空宇宙局 (NASA) のホームページ

https://www.nasa.gov/mission_pages/shuttle/images ,

図 3 は Wikipedia

https://en.wikipedia.org/wiki/Space_Shuttle#/media/File:Stsheat.jpg

による。)

第2問 (70点)

我々が生存している地球上では地球を取り巻く大気の循環(風)や海洋における海流があり、これらはいわゆる再生可能エネルギー源として期待できる。そのような流れの代表的な例として

- | | |
|--------------|------|
| 1) 空気の流れ(風) | 風力発電 |
| 2) 海水の流れ(海流) | 海流発電 |

等がある。前者に関してはよく知られているように、すでに実用化がかなり進んでいる。一方、我が国をとり巻く海洋には黒潮などの海流があり、その利用法は研究が始まったところである。この問題では、海流から取り出せるエネルギーの上限についての理論的考察をおこなう。

静止した液体(例えば水)や気体(例えば空気)は体積を一定に保てば、どんなに小さな力にたいしても変形し、元に戻ろうとする力が働かない。このように体積を一定に保てばどんな小さな外力にたいしても自由に变形する物体を流体という。水は身の回りで最も身近な流体の一例である。これから取り扱う水の力学はなじみが薄いかもしいないが、力学の基礎的な考え方が応用できるということを認識して考察をおこなえば、確実に答えに到達するはずである。

一般に密度が圧力によらず一定であり、粘性を持たない流体を非圧縮性完全流体というが、水は多くの場合に良い近似でこのような取り扱いが可能である。以下では摩擦および粘性は無視できるとする。また、簡単のため、水に働く重力の影響は考えないことにする。

[I]

まず、固体材料でできた図1のようなパイプの中を流れる水について考える。流れが存在するとき、ある瞬間におけるそれぞれの場所での水の速度の方向がその場所での接線になっている曲線を流線という。図1で矢印を付けた多数の細い線はパイプの中の流線を表す。一般に、流線は時間とともに変化するが、時間とともに変化しない場合もあり、そのような流れを定常流という。図1の流れは、定常流であるとする。

現実の水の場合、水の水速度は粘性により壁からの距離により変化するが、この問題では水の粘性を無視して良い場合を考え、流線が x 軸に平行でない $x_1 < x < x_2$ の領域を除き、パイプの軸に垂直な断面上で水の水速度は大きさが一定で水平方向を向いている。

また、 $x < x_1$ での速度を v_1 、 $x_2 < x$ での速度を v_2 と表すことにする。このような速度およびその他のベクトル量は、それが右向きの場合に正符号をもつものとする。

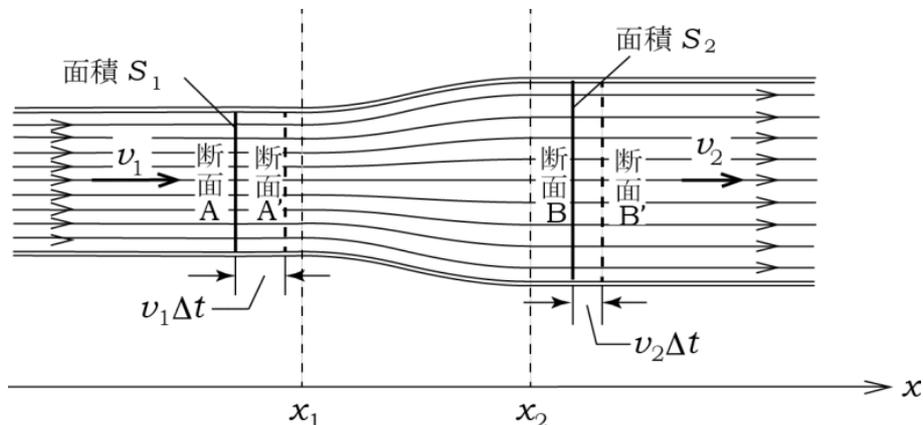


図1

パイプの断面はどこでも相似形で円とし、その断面積は、 $x < x_1$ の領域では一定の S_1 、 $x_2 < x$ の領域では一定の S_2 であるとする。

あるとき区間 AB(断面 A と B の間の領域) にあった水が時間 Δt をかけて区間 A'B' に移動したとする。この 2 つの区間で A'B' は共通だから、区間 AA' の体積は区間 BB' の体積に等しいことになる。水の密度を ρ と表そう。図 1 からわかるように、区間 AA' の体積は $v_1 \Delta t S_1$ で、その中の水の質量は $\rho v_1 S_1 \Delta t$ である。これは断面 A を Δt の間に通過した水の質量と言い換えることもできる。区間 BB' の間にある水の質量 $\rho v_2 S_2 \Delta t$ についても同様のことが言える。

ところで、質量保存則によると水の移動の間にその正味の質量は変わらないはずである。したがって、区間 AA' と区間 BB' の間にある水の質量は等しいはずで、その共通の質量を $J \Delta t$ と表すと

$$J \Delta t = \rho v_1 S_1 \Delta t = \rho v_2 S_2 \Delta t \quad (1)$$

が成り立つ。この式の 3 つの辺を Δt で割るとそれぞれの面を単位時間に通過する水の質量の間の

$$J = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 \quad (2)$$

という関係が得られる。この式を連続の式と呼ぶ。

断面 A と断面 B はそれぞれ $x < x_1$ と $x_2 < x$ の領域の任意の断面であり、また、 $x_1 < x < x_2$ の区間の定常流についても質量保存則は厳密に成り立つから、ここまでの議論は一般化できて、パイプの任意の断面を単位時間に通過する水の質量 J は場所によらず一定であるということが導かれる。また、式 (2) の右の等式は、太さが異なる管が接合されているとき、その中を通る水の速さはそれが通る管の断面積に反比例することを意味する(なお、図 1 の $x_1 < x < x_2$ では速度が鉛直方向の成分をもつので、 J の表式は少し複雑になる)。

上の議論において区間 AA' と BB' の水の質量は等しいが、運動量や運動エネルギーは等しくない。この差を考えることによって、水が区間 AB から A'B' に移動したときの水の運動量と運動エネルギーの変化量を計算することができる。

問 1 水平方向右向きに外力 F が働き、時間 Δt に区間 AB から A'B' に移動する間に变化した水の運動量を Δp とする。 Δp を $J, v_1, v_2, \Delta t$ を用いて表せ。このときこの水に働く外力 F を $\Delta p, \Delta t$ で表せ。

問 2 前問の移動の間に水が得た運動エネルギー ΔK を $J, v_1, v_2, \Delta t$ を用いて表せ。

ここで計算した運動量と運動エネルギーの変化は、水に外から働いた力 F によってもたらされた。運動量変化と力の間関係は水の運動方程式によって計算できる。また、運動エネルギーの変化は外力 F が水に仕事をする結果だから、それらの間関係もエネルギーと仕事の間の力学の関係から決まる。

ここでは、パイプの両端にはピストンが付いていて、それが内部の水を両側から押して水の圧力を生み出している場合を考える。右端のピストンは水に大気圧 P_0 を加え、左端のピストンは、 $x < x_1$ での速度が v_1 となるように調節された圧力 P_A で押していたとする。

水には、さらにパイプの管壁からも圧力が加わるが、 $x_1 < x < x_2$ の領域をのぞき管壁からの力は水平線に垂直だから水を加速する作用はない。

$x_1 < x < x_2$ の領域の水は図 2 のような側面が斜めの円錐台の中にあり、その上底と下底の面積はそれぞれ S_1 と S_2 である。この水は左から $F_1 = P_A S_1$ の大きさの力で右に向けて押され、右から $F_2 = P_0 S_2$ の大きさで左に押されている。さらに、側面からも押されている。図 2

には側面に加わる力の一つの例を \vec{F}_3 と示してある。この側面に働く圧力は、側面が斜めなので水平成分と円錐台の中心軸の方を向くものに分解できる。後者を側面の1周にわたって加えたものは消し合う。

したがって、側面に働く力を合わせたものは水平向きで、それを F_s ($s = \text{side}$) と表すことにする。これらの3つの力を合成したものが水の運動量を変化させる。

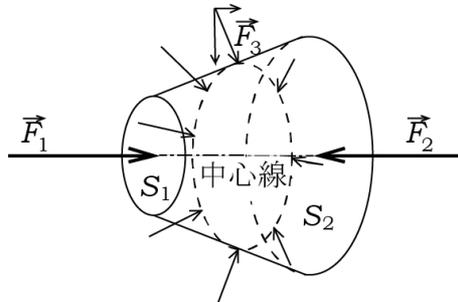


図2

問3 F_s を P_0, P_A, S_1, S_2 と問1で考えた $\Delta p, \Delta t$ を使って表せ。正負の符号に注意して答えよ。

[II]

次に、海の中の水の流れ、すなわち、海流について考える。海流はパイプの中を通るわけではないが、幅が数百 km で長さが数千 km の定常的な水流で、その中を互いにほぼ平行に続く流線を考えることができる。そのような流れがあるとき、その中から流線が外に漏れず、外からその中に流線が入ってこないような管を考え、それを流管と呼ぶ。図1のパイプも人工的に作られた流管とみなすことができる。

図3は、左から右に向けてできた海流の中に発電用のタービンを設置したときにタービンの近傍にできる流れを理想化したイメージである。2本の破線に囲まれた管は、その中を流れる水が「タービン」と記した水車の中を通り抜けるのでこれを「タービン流管」と呼ぶことにする。タービン流管の外はいたるところ流速 v_1 の海水が流れている。

タービン流管の中でも、 $x < x_1$ の領域の流速は v_1 であるが、その流線はタービンの羽の間を通過するとき変形され乱される。その結果、時間的に変動する渦などを不規則に含むようになるので、タービン流管の内部の $x_1 < x < x_2$ の領域には流線を描くことはできない。この領域をタービン領域と呼ぶことにする。

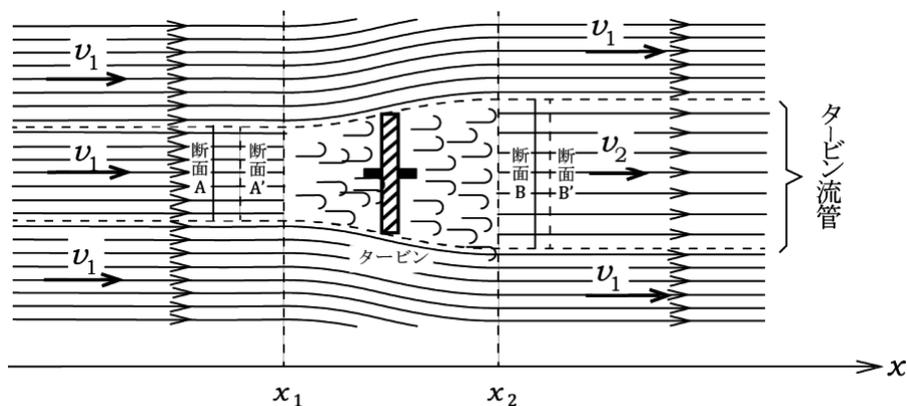


図3

流線の乱れは下流に行くに従い次第に収まり、 $x_2 < x$ の領域では再びまっすぐな流線を描いて流れていくとする。ただし、タービンを回すのに水の力学的エネルギーを使うので、水は減速される。すなわち水の流速は $v_2 (< v_1)$ となる。

タービン流管の位置と形は、その中と外の水の圧力が等しく釣り合っているということから決まる。海の表面は大気に接しているから、海面付近の海流を考えるとタービン流管の内も外も海水の圧力は大気圧 P_0 であるとする。したがって、 $x_2 < x$ の領域でも、タービン流管の中と外の水は力学的に釣り合っており、粘性の影響が出ない限りタービン流管は右の方に長く続く。

以下では、タービン領域の位置と形は変化せず、その中の水の密度はそれ以外の場所と同じに一様な ρ であるとする。

タービン領域で流れが乱れていても質量保存則は成り立つから、AA' にある質量と BB' にある質量とは等しい。

これらの考察により、タービン流管の $x < x_1$ と $x_2 < x$ にある断面を Δt の間に通過する水の質量はその断面がどこにあっても等しい値をもつことがわかる。それを $J_t \Delta t$ と表すことにしよう ($t = \text{turbine}$)。

一方、 $x_1 < x < x_2$ では流れの向きが不規則だから、タービンを通過する水の速度は位置によりまた時間により不規則に変化する。そこで、 x 軸に垂直なタービンの断面積を S_t とし

$$J_t = \rho v_t S_t \quad (3)$$

によって、タービンを横切る水の平均速度 v_t を定義する。

以下の各問でもタービン流管の上流側の断面 A の面積を S_1 、下流側の断面 B の面積を S_2 と表すことにする。

問4 タービン流管内で時間 Δt に水が区間 AB から A'B' に移動する間に水の運動量が Δp 変化したとする。 Δp を $J_t, v_1, v_2, \Delta t$ を用いて表せ。

問5 前問の移動の間に水が得た運動エネルギー ΔK を $J_t, v_1, S_1, S_2, \Delta t$ を用いて表せ。その結果を使って、図3でタービン流管のタービンより下流側の断面積が上流側より大きく描かれている理由を説明せよ。

周囲の海水の圧力は一様に P_0 だから、タービン流管の水に働く力の和は、静止した海水中の同じ形の部分空間の水に働く力の和に等しい。静水中の水に働く外からの圧力は全てつり合っているから、その部分空間に外から働く力の和は0である。したがって、タービン流管に働く力の和も0である。また、タービン流管を流れる水に生じた問4の運動量変化は、その水に働く外力による。上記の考察によれば外力のうち周囲の海水からの圧力に起因する力の和は0になるということだから、水に運動量変化を与えるものはタービンしかない。

問6 タービンがそこを通過する水に加える力が

$$F_t = J_t(v_2 - v_1) \quad (4)$$

となることを導け。

外力 F がある物体に働いてその物体を微小変位させた。その変位ベクトルを Δx と表すと、このとき外力がその物体 (流体) にした仕事 ΔW は、

$$\Delta W = F \Delta x$$

と表される。2つの1次元ベクトル F と Δx が同じ向きなら $\Delta W > 0$ であり、反対向きなら $\Delta W < 0$ である。この仕事が微小時間 Δt におこなわれるとき、単位時間当たりの仕事量は

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F \frac{\Delta x}{\Delta t} = Fv \quad (5)$$

と表され、これを外力の仕事率と呼ぶ。この仕事率は2通りの方法で計算できる。

第1の方法は、式(5)を使うものである。タービンが水に加える力 F_t は問6で求めた。その水の速度としては、式(3)で定義される平均速度 v_t を使う。

第2の方法は、タービン領域を通過する水の単位時間あたりの運動エネルギーの変化量を使うものである。タービンが水に仕事 ΔW をすると水の運動エネルギーが変化する。時間 Δt の間の変化量が問5で求めた ΔK である。

問7 以上の2つの方法で求めたタービンの仕事率は異なる式で表される。それを等しいとするとタービンを通過するときの水の平均速度 v_t を v_1, v_2 を使って表す式が得られる。その式を求めよ。

タービンは設置されておらず、速度 v_1 の定常流の海水が乱されることなく断面積 S_t の断面を通過するとき、この断面を単位時間に通過する海水の運動エネルギー (仕事率) を \mathcal{P}_0 とする。一方、これまで求めていた仕事率 \mathcal{P} はタービンが海水の定常流になす仕事率であった。我々が求める仕事率は海水の定常流がタービンになす仕事率 \mathcal{P}_t である。これらは作用反作用の法則によれば $\mathcal{P}_t = -\mathcal{P}$ の関係がある。海流発電の場合は、ここで定義した \mathcal{P}_t と \mathcal{P}_0 の比 $\frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_0}$ は海水の定常流がもつエネルギーをタービンが引き出す効率を与える。これを海流タービンの効率と呼び η と表すことにしよう。

問8 前問(問7)の結果を用いて \mathcal{P}_t が次式で与えられることを導け。

$$\mathcal{P}_t = \frac{1}{4} \rho S_t (v_1 + v_2) (v_1^2 - v_2^2) \quad (6)$$

問9 (a) \mathcal{P}_0 を ρ, v_1, S_t を用いて表せ。
 (b) タービンの効率 η を変数 $r = \frac{v_2}{v_1}$ の関数として表せ。 r の区間 $[0,1]$ での関数 $\eta(r)$ の大略の図を描け。
 (c) η が最大となるときの r の値とそのときの最大値 η_{\max} の値を求めよ。

このモデルでは、定常流からタービンにより引出しうる仕事率 \mathcal{P}_t の上限の値は $\eta_{\max} \mathcal{P}_0$ で与えられる。これはベッツ (Betz) の法則、また η_{\max} はベッツの上限として知られている。

[III]

我が国の四国の南方海域から紀伊半島の南方海域を東北東に黒潮本流が流れている。海上保安庁の調査等によれば黒潮は幅 100 ~ 200 km, 厚さ数百 m であり、その流速は年間を通じて、

2～4 ノット (knot: 1 knot = 1.852 km/h) である。[II] でおこなった考察に基づき、黒潮を再生可能エネルギー源としてそこから引き出せる発電量の上限について推定することにしよう。潮流には季節による変化や蛇行などの時間的変動があるが、簡単のために、黒潮は定常流であるとする。

- 問 10 (a) 黒潮の幅 100 km, 厚さ 400 m, 流速を平均 3 ノットと仮定して、黒潮の進行方向に垂直な断面積を単位時間に通過する運動エネルギー P_0 は何 W であるか推定せよ。
- (b) 黒潮の定常流の全断面積のうち約 $\frac{1}{100}$ の部分がタービンの設置等により発電に利用が可能であると仮定する。黒潮についての上記のデータ, ベツツの上限等を考慮して、この断面における海流発電による利用可能な発電能力 (W) の上限を推定せよ。

以上では力学の基礎から出発して、それを水の力学に適用し、定常流からエネルギーを取り出す場合について、その仕事率の上限の理論的考察をおこなった。黒潮の場合について、いくつかの仮定に基づいて、それらの上限の値を推定した。海流からエネルギーを取り出すことを実用化するためにはタービンの構造・設計、設置といった工学的側面、さらに海流の時間的、季節的変動に対処するための方法、環境的な側面等々多くの視点からの詳細な検討が必要である。

[参考]

空気も運動が音速以下であれば非圧縮性流体として扱うことができる。さらに粘性も十分小さい。したがってここでの水に対する非圧縮性完全流体としての理論的考察の結果は空気の定常流による風力発電の場合にも適用できる。

第3問 (70点)

この問題では電磁場の波動すなわち電磁波を考える。電磁波は互いに直交する電場と磁場の振動が伝播する波動である。振動する電場と磁場の振る舞いは静電場や静磁場とは異なり、電場と磁場が互いに影響し合う。ここでは、真空中に考えた仮想的な回路を用いて電磁気学の基本的な法則を表し、電場と磁場の相互の関係を調べ、真空中を光速で伝播する電磁波の存在を導く。さらに、荷電粒子(電子などの、電荷をもつ粒子)の存在が電磁波の伝搬をどのように変化させるかを考察する。

以下では、電場が z 成分、磁場(磁束密度)が x 成分だけをもち、 y 方向に伝わる電磁波を扱う。電場の z 成分 E 、磁束密度の x 成分 B は次のように表されるとする。

$$E(y, t) = E_0 \sin \phi(y, t) \quad (1)$$

$$B(y, t) = B_0 \sin \phi(y, t) \quad (2)$$

ここで、 E_0, B_0 は定数、 $\phi(y, t)$ は位相と呼ばれる座標 y と時間 t の関数

$$\phi(y, t) = ky - \omega t \quad (3)$$

であり、正の定数 k, ω は波長 λ 、周期 T により次のように定義される。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

また、以下では、仮想的な回路を単に閉回路と呼ぶことにする。

さらに、電気定数(真空の誘電率)を ϵ_0 、磁気定数(真空の透磁率)を μ_0 と表す。これらは次の値をもつ。

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} = 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

また、電子の電荷を $-e$ 、質量を m と表す。 e, m は次の値をもつ。

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad m = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

[I]

一般に、閉回路を貫く磁束 Φ が時間 t とともに変化すると、その回路に起電力 V が次のように生じる(ファラデーの電磁誘導の法則)。

$$V = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} \quad (4)$$

この式で、磁束の向きに進むように右ねじを回す向きが起電力の正の向きである。

図1のような、 y - z 面内の、 y 方向に微小な幅 Δy 、 z 方向に長さ L をもつ閉回路 C_1 ($P \rightarrow Q \rightarrow Q' \rightarrow P' \rightarrow P$) を考える。 C_1 を貫く磁束は近似的に $(L\Delta y) \cdot B_0 \sin \phi(y, t)$ と表されるから、ファラデーの電磁誘導の法則(4)により、 C_1 に生じる起電力 V は

$$V = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(L\Delta y)B_0 \{ \sin \phi(y, t + \Delta t) - \sin \phi(y, t) \}}{\Delta t}$$

と与えられる。 $\Delta\phi = \phi(y, t + \Delta t) - \phi(y, t)$ とおくと

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \phi(y, t + \Delta t) - \sin \phi(y, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\sin(\phi + \Delta\phi) - \sin \phi}{\Delta\phi} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

となることに注意すると、 V は次のように表される。

$$V = (L\Delta y) \omega B_0 \cos \phi \quad (5)$$

$B_0 \sin \phi$ は磁束密度の x 成分だから起電力の正の向きは図 1 の矢印の向きである。

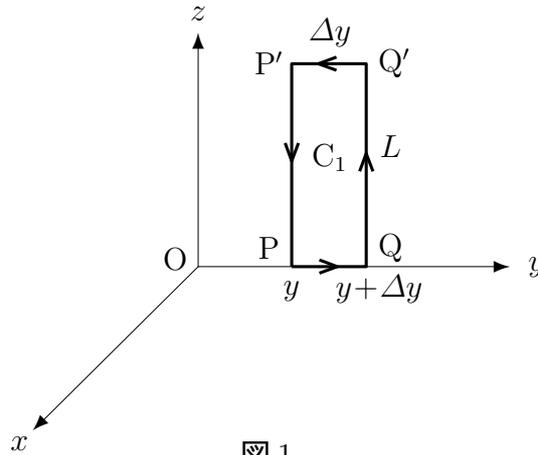


図 1

一方、 C_1 に生じる起電力は、 C_1 に沿った電場の成分により次のように表される。

$$V = L \cdot E(y + \Delta y, t) - L \cdot E(y, t) \quad (6)$$

問 1 Δy が十分小さいとして、次の式が成り立つことを示せ。

$$\omega B_0 = k E_0 \quad (7)$$

[II]

一定の直線電流 I が流れていると電流の周りに図 2a のように磁束密度 \vec{B}_I が生じる。磁束密度は直線電流を中心とする図 2a のような円周方向で、電流から距離 r の場所で次の大きさをもつ。

$$B_I = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

このとき、図 2b のような向きの半径 r の円周 C_2 を考え、 C_2 を細かく分割して、 k 番目の部分の長さを Δs_k 、そこにおける C_2 方向の磁束密度の成分を B_k とする。 C_2 の各部分における積 $B_k \cdot \Delta s_k$ をすべて足し合わせて分割を十分細かくすると、次の式が得られる。

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_k B_k \Delta s_k = 2\pi r B_I = 2\pi r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 I$$

ここで、 \vec{B}_I は円周方向で、円周上で大きさが一定であることを用いた。

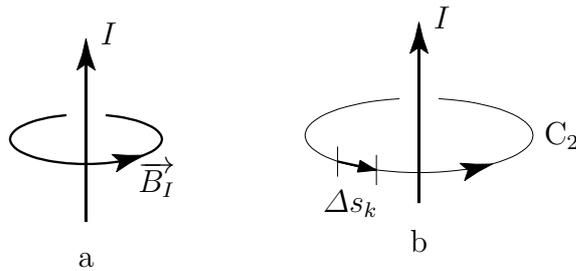


図 2

電磁場が時間変化しなければ，直線電流の周りの円周に対して成り立つ次の式

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_k B_k \Delta s_k = \mu_0 I \quad (8)$$

は，円周が任意の閉曲線になっても，その閉曲線を縁（へり）とする面を貫く電流を I とすれば成り立つことが示される。閉曲線を縁とする面はどのような曲面でもよい。これが電流と電流がつくる磁場の関係を表すアンペールの法則である。

マクスウェル (J. C. Maxwell) は 1864 年に，時間変化する電場のある空間にも磁場ができていると考えると理論的に矛盾がないことを見出し，アンペールの法則を一般化したアンペール・マクスウェルの法則を導いて電磁波の存在を予言した。

閉曲線の囲む面が面積 S の平面で，電場の法線成分 E_n は面内で一定とすると，アンペール・マクスウェルの法則は次のように表される。

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_k B_k \Delta s_k = \mu_0 I + \mu_0 \frac{d}{dt} (S \cdot \epsilon_0 E_n) \quad (9)$$

ここで， $S \cdot \epsilon_0 E_n$ を電束と呼び，電束の時間微分を電束電流と呼ぶ。電流，電束電流が貫く面の法線の向きは，図 2b に示されたアンペールの法則の場合と同じように，閉曲線の向きに右ねじを回したときに進む向きである。

図 3a のように，一定の直線電流 I があるときには，電流の周りの円周 C_3 を縁とする面をどのようにとっても式 (8) が成り立つ。例えば，図 3b のように， C_3 を縁，円 S_1 または円 S_2 を底面とするコップを伏せたような面の場合でも，底面を貫く電流は I だから式 (8) が成り立っている。

一方，図 3c のように，この電流 I の途中に平行板コンデンサーが入っている場合を考えると，図 3d のように，底面 S_1 がコンデンサーの極板の間にあるときには面を貫く電流は 0 となる。したがって式 (8) の右辺の値は面のとりかたによって変化してしまう。これに対して，電束電流を考慮した式 (9) の右辺の値は底面が S_0, S_1, S_2 のどの場合でも同じである。

問 2 コンデンサーの極板の電荷が時間変化していることに注意して，図 3d の場合，式 (9) の右辺の値は底面が S_0, S_1, S_2 のどの場合でも同じであることを示せ。

電流と電束電流の和が閉曲線を縁とする面のとりかたに依存しないことはアンペール・マクスウェルの法則が成り立つための必要条件にすぎず，証明にはならない。しかし，マクスウェ

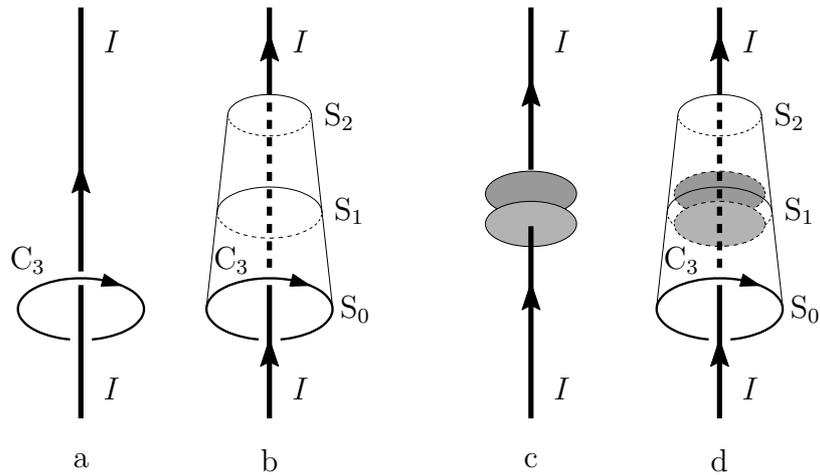


図 3

ルの予言どおりに電磁波が存在することなどにより，現在ではアンペール・マクスウェルの法則は確立している。

[III]

電磁誘導の法則とアンペール・マクスウェルの法則を用いて真空中の電磁波を考えよう。

図 4 のように， x - y 面内の，微小な幅 Δy で長さ L の細長い閉曲線 C_4 ($P \rightarrow P'' \rightarrow Q'' \rightarrow Q \rightarrow P$) を考え， C_4 に式 (9) を適用する。

まず，左辺は次のように表せる。

$$L \cdot B(y, t) - L \cdot B(y + \Delta y, t)$$

真空中では右辺第 1 項の電流は 0 である。また， Δy は微小だから C_4 で囲まれた面の電束は y における電場を使って近似的に $(L\Delta y) \cdot \epsilon_0 E(y, t)$ と表され，右辺第 2 項の電束電流は

$$\mu_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(L\Delta y)\epsilon_0[E(y, t + \Delta t) - E(y, t)]}{\Delta t} = -\epsilon_0\mu_0 (L\Delta y)\omega E_0 \cos \phi$$

と与えられる。これらを用いると，式 (9) は次のようになる。

$$L \cdot B(y, t) - L \cdot B(y + \Delta y, t) = -\epsilon_0\mu_0 (L\Delta y)\omega E_0 \cos \phi \quad (10)$$

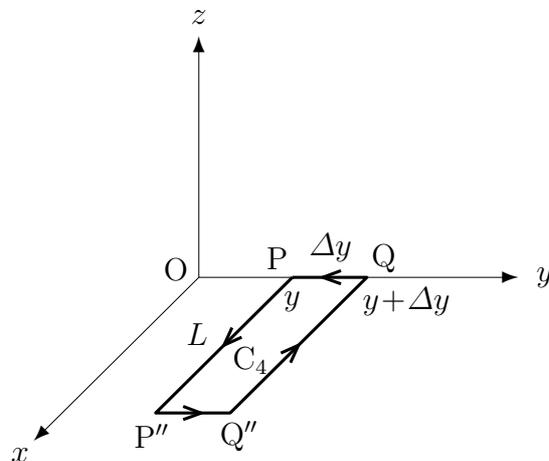


図 4

問3 Δy が十分小さいとして、式 (10) から次を導け。

$$kB_0 = \varepsilon_0\mu_0\omega E_0 \quad (11)$$

問4 (a) 式 (7) と式 (11) から、 ω と k の関係を求め、波の速さ $\frac{\lambda}{T}$ を ε_0, μ_0 で表せ。
(b) 波の速さの数値を求めよ。

このようにして得られる波の速さが当時知られていた光の速度に近いことから、マクスウェルは「光は電磁波である」と考えた。現在、このことは確立している。

式 (7), (11) から、 E_0 と B_0 は同符号である。したがって、電磁波の進行方向は、電場の向きから磁場の向きに右ねじを 90° 回転したときに (右ねじが) 進む向きになっている。

[IV]

ここまでは、真空中の電磁波を考えたが、[IV] では、荷電粒子が存在する場合を考える。また、電磁場の振動の振幅は十分小さいとする。

負電荷 $-e$ (< 0) をもつ電子と正電荷 e (> 0) をもつイオンが、ともに数密度 n で一様に分布しているとしよう。これらの荷電粒子は電磁場によって動き、電流が流れるから、この場合は [III] と違って、式 (9) の右辺第 1 項の電流の項が 0 ではない。そこで、図 4 の C_4 で囲まれた微小な幅の面を通る電流を求めよう。ただし、イオンの質量は電子に比べて非常に大きいので、イオンは動かないとしてよい。また、電子の熱運動も無視してよいとする。

問5 数密度 n 、電荷 $-e$ の電子が z 方向に速度 v_z で動くとき、 z 軸に垂直な単位断面積の面を単位時間に通過する電気量は $(-e)nv_z$ であることを示せ。

電子は電場から z 方向に力 $(-e)E_0 \sin \phi$ を受ける。 z 方向の加速度は速度 v_z の時間微分であることを注意すると、電子の z 方向の運動方程式は次のように与えられる (電磁場の振幅が小さいときには、電子の振動は z 方向だけとしてよい)。

$$m \frac{dv_z}{dt} = (-e)E_0 \sin \phi$$

電子の z 方向の速度 v_z が

$$v_z = v_0 \cos \phi$$

の形に表されるとして定数 v_0 を求め、問 5 の表式を用いると、 C_4 で囲まれた面を通る電流が、次のように表されることがわかる。

$$(L\Delta y) \frac{ne^2}{m\omega} E_0 \cos \phi \quad (12)$$

問6 (a) 定数 v_0 を求めよ。
(b) C_4 で囲まれた面を通る電流が式 (12) で表されることを示せ。

式 (12) を式 (9) に代入すると，真空中 ([III]) の場合の式 (10) の代わりに次式が得られる。

$$L \cdot B(y, t) - L \cdot B(y + \Delta y, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 (L \Delta y) \left(1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2} \right) \omega E_0 \cos \phi \quad (13)$$

Δy が十分小さいとすると，これから次の式が導かれる。

$$kB_0 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega \left(1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2} \right) E_0 \quad (14)$$

問7 式 (13) から式 (14) を導け。

問8 式 (14) の形から， $\left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \right)^{1/2}$ は振動数の次元をもつはずである。 n, e, ε_0, m の次元を用いて，このことを示せ。

式 (14) に現れた振動数 $\left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \right)^{1/2}$ をプラズマ (角) 振動数と呼び， ω_p と表す。

$$\omega_p = \left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \right)^{1/2} \quad (15)$$

式 (7) と式 (14) を用いると， ω^2 が k の関数として次のように表せる。

$$\omega^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} k^2 + \omega_p^2 \quad (16)$$

したがって，電磁場の振動が波動として伝わるためには $\omega > \omega_p$ でなければならない。

問9 式 (7) と式 (14) から式 (16) が導けることを示せ。

ここで考えているように電磁波 (光) が物質中を伝わる際には，その速さ $\frac{\lambda}{T}$ は真空中とは異なっている。真空中の光速 c と物質中の電磁波の速さ $\frac{\lambda}{T}$ の比

$$\frac{c}{\lambda/T} = \frac{c}{\omega/k} \quad (17)$$

を物質の屈折率と呼ぶ (速さ $\frac{\lambda}{T}$ は電磁波の位相の進む速さで，電磁波の信号や光子の進む速さとは異なる概念のものだが，電磁波の屈折率はこの速さで定義される)。

問10 いま考えている荷電粒子の分布している空間の屈折率を式 (16) を用いて ω と ω_p で表せ。

原子・分子が電子を放出してイオンになることを電離といい，地表から高度 100 ~ 300 km の大気上層にあって，電離してできた電子・イオンが存在する部分を電離層という。電離層ではイオンと電子がほぼ同じ数密度で存在し，電磁場の振動には式 (16) が成り立っている。

地表から電波を送信すると，はじめは真空中の電磁波 (光) として伝わるが，やがて電離層に到達する。

- 問 11 (a) 電離層中の電子の数密度 n が 10^{12} m^{-3} 程度として，電離層中のプラズマ (角) 振動数 ω_p の数値を求めよ。
- (b) 屈折率の大きな物質から屈折率の小さな物質に光が入射する場合と同じように考えると，電離層に到達したときの電波の振る舞いとしてどのようなことが予想されるか。

[補足]

磁束密度 \vec{B} に対する式 (9) の左辺のような物理量を，電場 \vec{E} に対しても同じように定義できる。これを用いると，閉回路に生じる起電力は

$$V = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_k E_k \Delta s_k$$

と表される。閉回路の向きは起電力の正の向きである。これを用いると，ファラデーの電磁誘導の法則 (4) は次の形に書くことができる。

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_k E_k \Delta s_k = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (18)$$

式 (6) は C_1 にこの式を適用したものである。

式 (18) の左辺は，閉回路に沿って単位電荷を 1 周させるときに電場のする仕事である。例えば，静止した点電荷のつくる電場だけがあるような場合には，この仕事は 0 であるが，磁束の時間変化がある場合には閉回路の起電力に等しくなる。

磁束 Φ に対応して電束を Φ_E と置くと，ファラデーの電磁誘導の法則 (18) とアンペール・マクスウェルの法則 (9) は次のように対をなす形に表される。

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_k E_k \Delta s_k = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_k B_k \Delta s_k = \mu_0 I + \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

これは，電磁気学における電場と磁場の対応関係の一つの例である。

第4問 (60点)

[宇宙線とは]

宇宙から絶えず地球へ降り注ぐ、高いエネルギーの電子や陽子や原子核があり、宇宙線と呼ばれる。いまから百年ほど前、オーストリア人のヘス (V. Hess) が、気球に乗って 5000 m の上空で放射線量を測ったところ、地上の 9 倍にもなった。このことから自然の放射線には宇宙に起源をもつものがあることが発見され、宇宙線と名付けられた。上空を飛ぶ飛行機の機内は宇宙線が多いため放射能も地上より強いが、地上でも日本人が自然から受ける放射線量の約 20% は身体を毎秒数十個貫通する宇宙線が原因だ。また、宇宙線は大気をイオン化し、そのことが間接的に、雲や雷、あるいは気象に、重要な役割を果たしているだろうと考えられている。このように宇宙線は普段はその存在を意識しないが、実は私達に深い関わりがある。

では宇宙線は、宇宙の何処で高いエネルギーまで加速されるのだろうか？ 近年、超新星爆発が加速に重要な働きをしていることがわかってきたので、以下では、その理由をエネルギーを手掛かりに考えよう。

[宇宙線のエネルギーと超新星爆発のエネルギー]

陽子や電子や原子核の宇宙線は電荷をもつため銀河円盤内を銀河の磁場で曲げられながら飛び回り、平均寿命 $\tau =$ 約 1000 万年程度で銀河円盤の外へ漏れ出るか、銀河円盤内の星間物質と衝突して消滅する。我々の銀河の銀河円盤の半径 R_G は約 5×10^4 光年、円盤の厚さ D_G は約 10^3 光年で、その中の宇宙線のエネルギー密度 w は約 $w = 10^6 \text{ eV/m}^3$ ($1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$) である。

問1 銀河円盤内では宇宙線の全エネルギーは一定に保たれているとすると、失われる宇宙線を補って銀河内で新たに作られる宇宙線のエネルギーは何 J/年と考えられるか。($c =$ 光速 $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$, $1 \text{ 光年} = c \times 1 \text{ 年} = 1 \times 10^{16} \text{ m}$ としてよい。)

この膨大な率で失われる宇宙線エネルギーを補っているものは、主に超新星爆発と考えられている。重い星は進化の最後に超新星爆発を起こす。進化の最後に核融合のエネルギーが尽き、高い圧力を維持できず、星の中心部が重力で陥落して半径が縮み、電子と陽子は合体して中性子になり、中性子星ができる。中性子星とは、主に中性子で作られ、質量は約 $M = 1.3 M_S$ ($M_S =$ 太陽質量 $= 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$) もあるのに、半径はわずか $R = 10 \text{ km}$ と小さく、原子核と同じ程度の高密度の星である。縮んだために生じた位置エネルギーは負で、簡単のため密度が一樣と仮定すれば次式で与えられる。

$$U = -\frac{3GM^2}{5R} \quad (1)$$

($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ J m kg}^{-2}$ は万有引力定数)

問2 式 (1) を導け。

[ヒント] 星の質量密度を ρ と置く。半径が r 、質量が m の球の表面に一樣に、微小な質量 Δm を遠方から運んでくる微小な仕事 (位置エネルギーの微小な増加) は (図1参照)

$$\Delta U = -\frac{Gm\Delta m}{r} \quad (2)$$

である。これを微分の式 $\frac{dU}{dm} = -\frac{Gm}{r}$ とみなし，その右辺を密度 ρ を用いて変数 m のみの関数で表せば，この式は積分できて， U が ρ と質量 M の関数として求まるだろう。そこから ρ を消去すれば， U が半径 R と質量 M の関数として求まる。

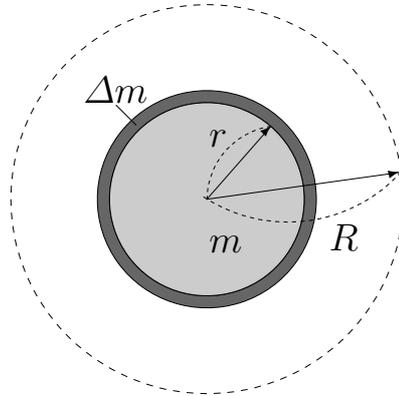


図1 半径 r ，質量 m の球の表面に一様に，無限遠から微小質量 Δm を運び，質量 M ，半径 R になるまで続ける。

この負のエネルギーを相殺する正のエネルギー $|U|$ が，爆発によって生じるエネルギーとなる。そのエネルギーの大部分は，目に見えない素粒子ニュートリノの放出に使われ，残りの約1%が目に見える物質の大爆発に使われ，超新星爆発として観測される。この目に見える爆発エネルギーの，さらに約1%(結局，爆発によって生じるエネルギー全体の $\varepsilon = 0.01\% = 0.0001$) が宇宙線の加速に使われると考えてみよう。

問3 $|U|$ の0.01% が宇宙線の加速に使われるとして，1回の爆発で得られる宇宙線のエネルギー W_1 を求めよ。また，上記のような超新星爆発が銀河内で発生する頻度を百年に一度， $f = \frac{1}{100 \text{年}}$ として，超新星による銀河の宇宙線エネルギーの供給率 $W_1 f$ をJ/年の単位で求めよ。

問1と問3の結果から，宇宙線のエネルギーが銀河から失われる率と，超新星爆発が宇宙線のエネルギーを供給する率とは互いに数倍以内にあることがわかる。宇宙線の平均寿命 や超新星爆発の頻度 f や宇宙線に使われるエネルギーの割合 ε の値はおおまかで誤差が大きいことを考慮すると，両方の率は等しい可能性がある。これほど大きなエネルギー源は他に無いため，超新星爆発が宇宙線の起源として最有力である。

[宇宙線の加速]

銀河の星間空間には，場所にもよるが， 1cm^3 に例えば原子1個程度の非常に希薄なガスがあり，それは希薄でも大きな空間で考えると重要な働きをする。銀河に希薄なプラズマの雲(荷電粒子のガスの集団)があり，このプラズマの雲と共に動く座標系(プラズマの雲の静止系)では電場が無く静磁場(時間変化しない磁場)だけがあるとしよう。静磁場の中では荷電粒子はその運動方向は曲げられるが加速はされない。では，宇宙線はどうして加速されるのか？ この疑問の解としてフェルミ(E. Fermi)が提案した「フェルミ加速」と呼ばれるメカニズムが有力

だ。それは動いているプラズマの雲が宇宙線を繰り返し跳ね返すことで加速をする，というアイデアである。以下で，フェルミ加速を考えよう。

ただし，光速に近い速さで飛ぶ荷電粒子の運動を考えるので，相対性理論を使う必要がある。そのため必要な相対性理論を説明しよう。それはエネルギーと運動量の，(i) 速度による表し方，および，(ii) 異なる座標系で見たそれらの値の関係（ローレンツ変換）である。

(i) エネルギーと運動量

相対性理論によると，質量 M の粒子が静止しているとき，エネルギー E はアインシュタインの式 $E = Mc^2$ で与えられ，静止エネルギーと呼ばれる。その粒子が速さ V で動いているときのエネルギー E と運動量 p は， $\beta = \frac{V}{c}$ ， $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ として，

$$E = Mc^2\gamma, \quad p = Mc\gamma\beta \tag{3}$$

が導かれる。

問4 (a) 速さ V が光速 c に非常に近いとき ($\beta \rightarrow 1$)，次の関係が成り立つことを示せ。

$$E \approx pc \tag{4}$$

(b) 速さ V が光速 c より十分小さいとき ($\beta \ll 1$)，次の関係が成り立つことを示せ。

$$E \approx Mc^2 + \frac{1}{2}MV^2, \quad p \approx MV \tag{5}$$

E の静止エネルギーの項 (定数) を除くと，エネルギーも運動量も見なれた式であるろう。

(ii) ローレンツ変換

座標系 O で見たとき，粒子のエネルギーが E ，運動量が p であるとする。この座標系に対し z 方向に速度 v で動く座標系 S (図2) に乗った人がこの粒子を見るとき，エネルギーは E^* ，運動量は p^* であるとする。このとき，これらの量の間には $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ として

$$\begin{aligned} p_x &= p_x^*, \quad p_y = p_y^*, \quad p_z = \gamma\left(p_z^* + \frac{vE^*}{c^2}\right) \\ E &= \gamma(E^* + vp_z^*) \end{aligned} \tag{6}$$

の関係がある。式 (6) は運動量，エネルギーに関するローレンツ変換と呼ばれている。

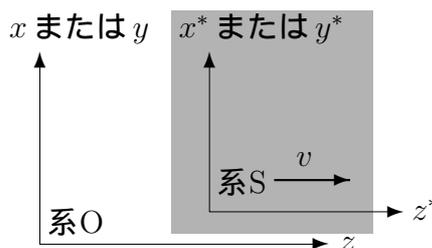


図2 座標系 O と，それに対して速度 v で動く座標系 S の関係

[フェルミの加速]

超新星が爆発すると、その高温ガスが周囲の希薄なガスを取り込みながら一緒に高速で膨張する。膨張速度が周囲のガスの音速より速いとき、膨張するガスと周囲のガスとの間に境界面ができ、それを衝撃波面と呼ぶ。高温ガスのかたまりはほぼ球形に広がるとしても、その半径が十分大きければ、衝撃波面は狭い領域では平面と近似できるだろう。その平面の法線に平行に、波面の進む向きに z 軸を取ろう (図 3)。

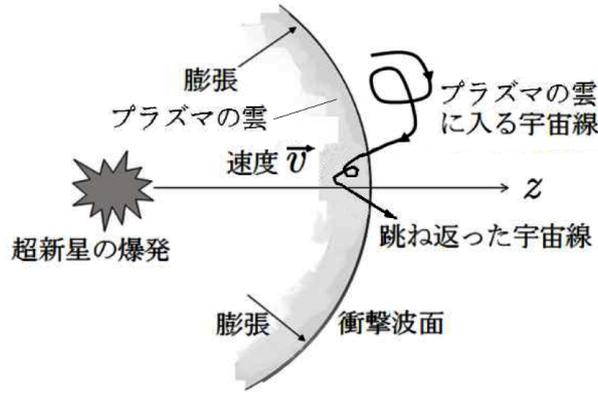


図 3 超新星爆発により生じる高温のプラズマの膨張と衝撃波面，および、プラズマに跳ね返ってエネルギーを増す宇宙線

超新星の重心が静止している座標系を系 O と呼ぼう。衝撃波面の外の前方に、光速に近い速さで飛んでいる荷電粒子を考える。この粒子は周囲の乱雑な磁場の中で絶えず方向を曲げられるためあまり遠くには行かず、やがて超新星の衝撃波面内の、速さ v で z 方向に飛ぶプラズマの雲に飲み込まれたとする。このプラズマの雲と共に動く座標系 (プラズマの雲の静止系、以後、系 S と呼ぶ) では、電場は無く、磁場は静磁場であると仮定する。プラズマの雲の中の乱雑な磁場で荷電粒子は向きを変え、やがてプラズマの雲から脱出する (図 3)。系 S で見た入射粒子の運動量とエネルギーを \vec{p}^* , E^* , 入射角を θ_1 , 放出角を θ_2 とする (図 4)。系 S で見ると電場がなく磁場は静磁場のため荷電粒子のエネルギー E^* は変化せず、入射時と放出時で等しい。しかし系 O で見ると、入射時のエネルギー E と放出時のエネルギー E' は、式 (6) より

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E^* - vp^* \cos \theta_1) \\ E' &= \gamma(E^* + vp^* \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (7)$$

である。ここで粒子のエネルギーは非常に高く、エネルギー $E \gg Mc^2$ として、式 (4) を使い

$$E^* = p^*c$$

と近似する。また、プラズマの雲の速さ v は光速に比べて十分小さい ($\beta = \frac{v}{c} \ll 1$) とし、 β^2 以上は無視すると、式 (7) から系 O で見たエネルギー変化率は

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E' - E}{E} = \beta(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (8)$$

となる。荷電粒子の運動方向は様々だから式 (8) を角度について平均しよう。ただし、荷電粒子が速度 v で動くプラズマの前方から入射し、前方に反射して放出される場合のみを考慮し

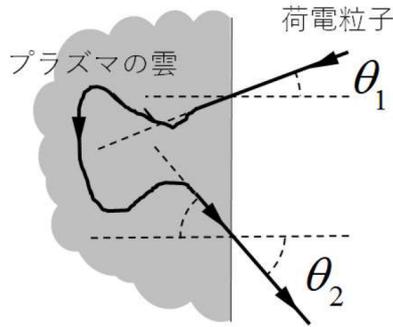


図4 プラズマの雲に荷電粒子が入り，方向を変えて出た。プラズマの雲と共に動く系（プラズマの雲の静止系 S）で見ると，入射時と放出時で，エネルギーは変わらない。一方，系 O で見ると，エネルギーが異なり加速されている。

$\cos \theta_1 \geq 0, \cos \theta_2 \geq 0$ とする。このとき θ_i ($i = 1, \text{または } 2$) の任意の関数 $g(\theta_i)$ の平均値 $\langle g(\theta_i) \rangle$ は次の式を用いて計算できる。

$$\langle g(\theta) \rangle = \frac{\int_{0 \leq \theta \leq \pi/2} g(\theta) \cos \theta \, d\Omega}{\int_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \cos \theta \, d\Omega} = \frac{\int_0^{\pi/2} g(\theta) \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta \, d\theta}$$

ここに $d\Omega = 2\pi \sin \theta \, d\theta$ は宇宙線が角度 $\theta \sim \theta + d\theta$ を向く確率に比例するための因子で， $\cos \theta$ は宇宙線が単位時間に z 軸に垂直な $x-y$ 面に入射する流量（確率）が宇宙線の速度の z 成分に比例するための因子である。

問5 $\frac{\Delta E}{E}$ の平均値 $\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle$ が次式となることを示せ。以下この平均値を α と置く。

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{4\beta}{3} \quad (9)$$

[ヒント] $\cos \theta = t$ と置いて， t についての積分に直すとよい。定積分の上限と下限の値に注意すること。

荷電粒子（宇宙線）は，超新星の衝撃波面の内側のプラズマの雲に（加速して）跳ね返された後も，衝撃波面の外のプラズマの磁場で何度も曲げられ遠くへ行かない間に，再び押し寄せる衝撃波面に飲み込まれまた跳ね返されて加速される（図5参照）。このように再三，衝撃波面に跳ね返されて加速され，そのたびにエネルギーは $(1 + \alpha)$ 倍になる。近似式 $(1 + x) \approx e^x$ を用い， N 回加速されると，エネルギー E は初めのエネルギー E_0 に比べ，

$$E \approx E_0 e^{N\alpha}$$

となる。

衝撃波面の前方に跳ね返されずにいったん後方に抜けても，その後，どこかのプラズマの雲で跳ね返されいつか衝撃波面の前方に出て来さえすれば，上の解析で宇宙線の経路が長くなっただけで加速率の結果は変わらない。裏側に奥深くまですり抜けてしまった粒子はもう戻って

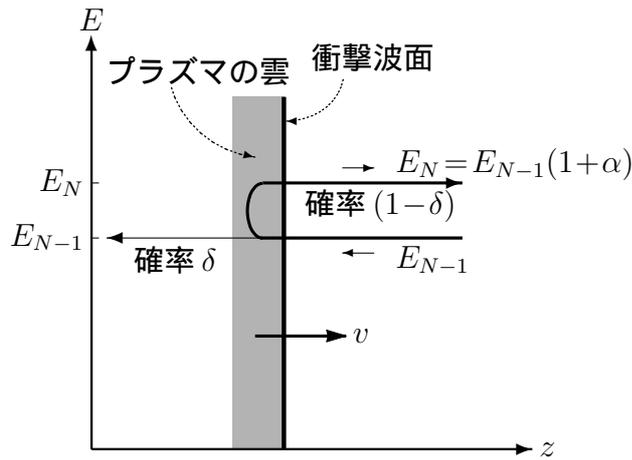


図5 衝撃波に $N - 1$ 回跳ね返された宇宙線の N 回目の跳ね返り

こないが，ほとんどの宇宙線はいつか衝撃波面を横切って戻ってくる。いったん外から衝撃波面に入った宇宙線が奥深くすり抜ける確率を δ ($\delta \ll 1$ とする) とすると，衝撃波面の前に N 回以上出て加速される確率 P_N は次式で与えられる。

$$P_N = (1 - \delta)^N e^{-N\delta}$$

問6 エネルギーが E 以上になる確率 P_E は，

$$P_E = \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-\delta/\alpha} \quad (10)$$

となることを示せ。

超新星の爆発に伴う衝撃波の環境では，詳細は略すが $\delta = \alpha$ となることが理論的に知られている。そのため， $\frac{\delta}{\alpha} = 1$ で，発生直後の宇宙線のエネルギーが E 以上になる確率は

$$P_E = \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-1}$$

となる。 E_0 について平均すると，発生した宇宙線のエネルギーが E 以上である確率は

$$f_1(E) = CE^{-1} \quad (C \text{ は定数}) \quad (11)$$

と与えられる。

問7 エネルギーが E から $E + \Delta E$ の間にある確率を $f_2(E)\Delta E$ と表すと，

$$f_2(E) = CE^{-2} \quad (12)$$

となることを示せ ($f_2(E)$ は確率密度と呼ばれる)。

[宇宙線の銀河からの漏れ]

電荷をもった宇宙線粒子は加速領域から離れた後、銀河内の磁場で飛跡が曲げられ回転しながら銀河内に長時間閉じ込められているが、やがて、銀河の外に漏れて失われる。エネルギーが高いほど磁場で曲がりにくく回転半径が大きくなり、銀河から漏れやすく、観測では銀河内の滞在時間は $E^{-0.7}$ に比例して短くなることが知られている。そのため、銀河内に留まる宇宙線のエネルギー分布は式 (12) から修正を受けて平均的に

$$f_3(E) = C'E^{-2} \times E^{-0.7} = C'E^{-2.7} \quad (13)$$

となる。陽子や酸素原子核などのエネルギー分布の観測結果は式 (13) とよく合っている。

ところで、銀河内の元素の存在比を光のスペクトル線や隕石などを用いて調べると、ホウ素の存在は酸素と比べると5桁も少なく、非常にまれな元素の1つである。しかし、宇宙線では、ホウ素原子核は酸素原子核と比べて1/10の程度で存在し、それほどまれではない。これは、酸素原子核などの宇宙線が星間ガスと衝突すると、いくつかの陽子や中性子を放出し、高い確率でホウ素原子核になるためと考えられている。

問8 簡単のため、酸素原子核が星間ガスと衝突すると、その半分のエネルギーをもつホウ素原子核になると仮定して、銀河内では、宇宙線のホウ素原子核のエネルギー分布は酸素原子核などのエネルギー分布 (13) と比べてどうなるか、エネルギーへの依存の仕方を考察せよ。ただし、衝突の確率は酸素のエネルギーに依存しないとする。